



TITLE:

同変Segal Machineについて (無限ループ空間の位相)

AUTHOR(S):

渡辺, 祐二

CITATION:

渡辺, 祐二. 同変Segal Machineについて (無限ループ空間の位相). 数理解析研究所講究録 1980, 389: 17-37

ISSUE DATE:

1980-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/104928>

RIGHT:

同変 Segal Machine について

阪大 理 渡辺 祐二

§ 0. Introduction

Segal は [3] で, 彼の Γ -空間を有限群 G の作用のある場合に一般化し, それに G -スเปクトラムを対応させる同変 delooping 定理を証明した。そこで仮定されていた命題の証明が, Wolfson [4] に現われたので, それらをまとめて紹介する。

§ 1. Statements

以下 G は有限群とする。

記号 W_0^G : コンパクト生成 Hausdorff 基座つき G 空間で基座が G -近傍変位レトラクト (G -NDR) であり, G -CW-複体のホモトピー型をもつもの, 基座を保つ連続 G -写像とのカテゴリ。

Γ : 基座つき有限集合と基座を保つ写像とのカテゴリ

定義 Γ から W_0^G への functor の事を; Γ - G -空間 と言う。

Γ - G -空間の射 \iff 自然変換

Γ - G -空間の射 $f: A' \rightarrow A$ が 同値 $\iff \forall S' \in \text{Ob } \Gamma, f(S') : A'(S') \rightarrow A(S')$ が G -ホモトピー同値 (G -h.e. と略す.)

定義 Γ - G -空間 A が 特殊

- \iff 1) $A(\text{point}) \xrightarrow[G\text{-h.e.}]{} \text{point}$
 2) $\forall S, T \in \text{Ob } \Gamma, A(S \vee T) \xrightarrow[G\text{-h.e.}]{} A(S) \times A(T)$

定義 Hopf- G -空間 $X \times X \xrightarrow{m} X$ が 群状

$\iff m$ がホモトピー逆元をもつ。

注意 特殊 Γ - G -空間 A に対して

右図の縦の写像が G -h.e. である事

を用いて $- \xrightarrow{m} -$ を定むると, $A(\underline{1})$

は Hopf- G -空間になる。(ここで

$\underline{1} = \{0, 1\}, \underline{2} = \{0, 1, 2\}, 0$ が基点, $\partial_1(i) = 1$ ($i = 1, 2$))

さらに, $A(\underline{1})$ が G -連結 (i.e. $\forall H < G, A(\underline{1})^H$ が弧状連結) なら群状になる。(例えば同変 Dold-Thom 定理 [5] を使う)

定義 Γ - G -空間 A が "good" $\iff \forall n,$

$\bigcup_{0 \leq i \leq n} A(S_i)(A(\underline{n})) \subset A(\underline{n+1})$ が \mathfrak{S}_{n+1} ($n+1$ 次対称群) 同変

G -NDR. (ただし $S_i: \underline{n} \rightarrow \underline{n+1} \iff S_i(j) = \begin{cases} j & (j \leq i) \\ j+1 & (j > i) \end{cases}$)

注意 $\forall \Gamma$ - G -空間は同値なものとして Γ を換えて "good" にできる. ([1] App. B, 又は [2] App. A.)

単体的 G -空間が "good" というのも同様に定義する. この

時は G_{n+1} 同変でなくともよい。

定義 $X \in \text{Ob } \mathcal{W}_0^G$ に対して, Γ^{op} から \mathcal{W}_0^G への functor X^Γ を次のように定義する。

$$\forall S \in \text{Ob } \Gamma, X^\Gamma(S) = \text{Map}_0(S, X) = X^{\#(S \setminus \{\text{基点}\})}$$

(ただし, Map_0 は, 基点を保つ写像のつくる G -空間。 G -写像の空間ではない。)

定義 functor $\Gamma \times \Gamma \xrightarrow{\wedge} \Gamma$ (smash 積) は "good" な特殊 Γ - G -空間 A を結んだ functor $(A \circ \wedge)$ を考え, 右の因子 Γ

に関してファイバー積をとって右図をつくる。これの

$$\begin{array}{ccc} (A \circ \wedge) \times_{\text{Ob}} \text{Mor} \times_{\text{Ob}} X^\Gamma & \longrightarrow & (A \circ \wedge) \times_{\text{Ob}} X^\Gamma \\ \downarrow & & \\ (A \circ \wedge) \times_{\text{Ob}} X^\Gamma & & \end{array}$$

push-out として, Γ - G -空間 A の X を定義する。(上図で, 2本の矢印は2通りの結合, Ob, Mor は Γ のそれら。)

注意 1) $A \otimes X$ が \mathcal{W}_0^G に値をとる事は, $A \otimes X$ を $\coprod_{n \geq 0} A(n) \times X^n / \sim$ の形で書き, フィルトレーションを入れた時 "goodness" と; X の基点の非退化性から分る。

2) X が G -連結 $\Rightarrow \forall S \in \text{Ob } \Gamma, (A \otimes X)(S)$ が G -連結 $\Rightarrow (A \otimes X)(1)$ は群状。

$$3) (A \otimes X) \otimes Y \cong A \otimes (X \wedge Y) \quad ([2] \text{ Lem. 3.7})$$

記号 V, W : 有限次元実表現空間, Σ^V : V の1点コンパクト化, $\Omega^V(\) = \text{Map}_0(\Sigma^V, \)$, $\Sigma^0 = 2$ 点。

注意 1) $A(\text{point}) = \text{point}$ なる標準的に Γ - G -空間の射 $A \otimes X \rightarrow \Omega^V(A \otimes \Sigma^V X)$ がある。

2) $A \otimes \Sigma^0 = A$

定義 $A(\text{point}) = \text{point}$ な "good" 特殊 Γ - G -空間 A に対して, $B^V A = (A \otimes \Sigma^V)(1)$ と定義, $B^V A \xrightarrow{\varepsilon_{VW}} \Omega^W(B^{VW} A)$ を, 上の注意の1)の写像の, object 1 の上の部分と定義。

さらに Hopf- G -空間 $A(1)$ が, 次の条件(*) を満たす場合を考える。

条件(*) $\pi_0(A(1)^G)$ は有限生成モノイド, $\forall H < G$, $\pi_0(A(1)^G) \rightarrow \pi_0(A(1)^H)$ は cofinal.

定義 $\alpha \in A(1)^G$ も, その成分の生成するモノイドが $\pi_0(A(1)^G)$ で cofinal になる様とり,

$$A(1)_\infty = \text{Telescope}(A(1) \xrightarrow{\times \alpha} A(1) \xrightarrow{\times \alpha} A(1) \rightarrow \dots)$$

と定義する。

$V^G \neq \{0\}$ とすると, Hopf- G -空間 $\Omega^V B^V A$ はホモトピー逆元を持つので, 次のホモトピー可換な図式がつけられる。

$$\begin{array}{ccccc}
 A(1) & \xrightarrow{\times \alpha} & A(1) & \xrightarrow{\times \alpha} & A(1) \rightarrow \dots \\
 \varepsilon_V^\circ \downarrow & & \varepsilon_V^\circ \downarrow & & \varepsilon_V^\circ \downarrow \\
 \Omega^V(B^V A) & \xrightarrow{\times (\varepsilon_V^\circ \alpha)} & \Omega^V(B^V A) & \xrightarrow{\times (\varepsilon_V^\circ \alpha)} & \Omega^V(B^V A) \rightarrow \dots \\
 & \searrow & \downarrow \times (\varepsilon_V^\circ \alpha)^{-1} & \swarrow \times (\varepsilon_V^\circ \alpha)^{-2} & \\
 & & \Omega^V(B^V A) & &
 \end{array}$$

これから, 次の G -ホモトピー可換な図式を得る.

$$\begin{array}{ccc} A(1) & \hookrightarrow & A(1)_\infty \\ \varepsilon_V^0 \searrow & & \swarrow \omega_V \\ & \Omega^V(B^VA) & \end{array}$$

特殊

定理 (Segal [3]) A を "good" な Γ - G -空間,

$A(\text{point}) = \text{point}$ とすると

0) $\{B^VA, \varepsilon_{V \oplus W}^V\}$ は G -スペクトラム. $B^0A = A(1)$

1) $A(1)$ が群状 $\Rightarrow \forall V, \varepsilon_V^0: B^0A \xrightarrow[G\text{-h.e.}]{} \Omega^V(B^VA)$

2) $V^G \neq \{0\} \Rightarrow \forall W, \varepsilon_{V \oplus W}^V: B^VA \xrightarrow[G\text{-h.e.}]{} \Omega^W(B^{V \oplus W}A)$

3) $A(1)$ が条件(*) をみたし, $V^G \neq \{0\}$

$\Rightarrow \omega_V: A(1)_\infty \rightarrow \Omega^V(B^VA)$ は G -ホモロジー同値 (i.e.

$\forall H < G$, H -不動点への制限 $(\omega_V)^H$ がホモロジー同値.)

定理は, 以下に述べる2つの命題からの帰結である.

定義 右の形の \mathcal{W}_0^G の可換図式が

G -ホモトピー=カルテシアン (G -HC

γ 略す.) \iff 標準的な G -写像

$X' \rightarrow X \times_X^h Y' \rightarrow Y'$ (ホモトピー論的フ

アイバー積) が G -h.e.

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & Y' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & Y \end{array}$$

命題 I (Wolfson [4]) A を "good" な特殊 Γ - G -空間,

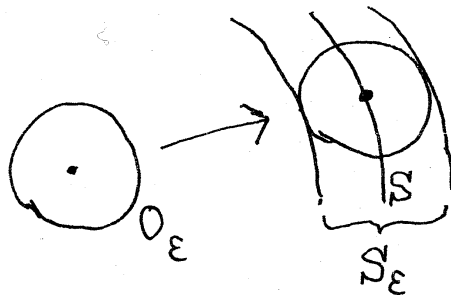
$X_1 \xleftarrow{f_1} Y \xrightarrow{f_2} X_2$ を \mathcal{W}_0^G の図式とする. このとき,

Y が G -連続, 又は Y が自明な G -作用を持つ有限集合であり $A(\mathbb{1})$ は群状, ならば下図は G -HC. (ただし $\Sigma_{(f_1, f_2)}$ は二重約写像柱, 写像は自然に導かれるものとする.)

$$\begin{array}{ccc} (A \otimes Y)(\mathbb{1}) & \longrightarrow & (A \otimes \Sigma_{f_2})(\mathbb{1}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (A \otimes X_1)(\mathbb{1}) & \longrightarrow & (A \otimes \Sigma_{(f_1, f_2)})(\mathbb{1}) \end{array}$$

V を有限次元実表現空間とする.

記号 $S: V$ の単位球面, $O: V$ の原点, $(\)_\varepsilon: V$ における開 ε -近傍, $(\)^+$: 一点コンパクト化, 又は既にコンパクトなものに対しては, 基点の disjoint union.



上図のような自然な G -写像 $S \rightarrow \text{Map}(O_\varepsilon, S_\varepsilon)$ から Pontryagin-Thom 構成によってできる G -写像

$S^+ \rightarrow \text{Map}_0(S_\varepsilon^+, O_\varepsilon^+)$ に連続 functor $A \otimes (\)(\mathbb{1})$ を続けると, G -写像 $S^+ \rightarrow \text{Map}_0((A \otimes S_\varepsilon^+)(\mathbb{1}), (A \otimes O_\varepsilon^+)(\mathbb{1}))$ が得られる. これの adjoint をとって, $O_\varepsilon^+ \cong \Sigma^V$ を使って書きなおすと, G -写像

$$(A \otimes S_\xi^+)(1) \xrightarrow{D_V} \text{Map}_0(S^+, (A \otimes \Sigma^V)(1))$$

が得られる。

命題II (Segal [3]) "good"な特殊 Γ - G -空間 A に対して
上の G -写像 D_V は G -h.e.

§2. 命題Iの証明 [4]

構成 A を "good"な特殊 Γ - G -空間, $X \in \text{Ob } \mathcal{W}_G^0$ とする。

G -カテゴリー (位相も入れる.) $\text{simp}(A, X)$ を次で定義。

$$\text{Ob} = \{(\alpha, S, \xi) \mid S \in \text{Ob } \Gamma, \alpha \in A(S), \xi \in \text{Map}_0(S, X)\}$$

$$\text{Mor}((\alpha, S, \xi), (\beta, T, \eta))$$

$$= \left\{ \theta \in \text{Mor}_\Gamma(S, T) \mid \begin{array}{ccc} A(\theta) \downarrow & S & \xrightarrow{\xi} X \\ a & \downarrow \theta & \searrow \eta \\ b & T & \end{array} \right\}$$

G は, $(\alpha, S, \xi) \xrightarrow{g \cdot} (g \cdot \alpha, S, g \cdot \xi)$ で作用する。

$\text{simp}(A, X)$ の族体の単体的 G -空間の右単体の空間は

$$\overbrace{A \times_{\text{Ob}} \text{Mor}_{\text{Ob}} X \cdots X \text{Mor}_{\text{Ob}} X X^\Gamma}^{\text{右コ}}$$

(ただし Mor, Ob は Γ のそれ) である。

この幾何学的実現を $A'(X)$ と書く。 A' は functor $\mathcal{W}_G^0 \rightarrow \mathcal{W}_G^0$ となる。

注意 上の単体的 G -空間は "good" であり, この事から
functor A' が \mathcal{W}_G^0 に値をとる事がわかる。

補題 ([4] Lem. 1.8) $X_1, X_2 \in \text{Ob } \mathcal{W}_0^G$ とする. 自然に導かれる写像によって

$$A'(X_1 \vee X_2) \xrightarrow[\text{G-f.e.}]{\sim} A'(X_1) \times A'(X_2)$$

(証明) G -カテゴリー $\text{simp}(A, X_1, X_2)$ を次で定義する.

$$\text{Ob} = \left\{ \left(a, \begin{matrix} S_1, \xi_1 \\ S_2, \xi_2 \end{matrix} \right) \mid S_i \in \text{Ob } \Gamma, a \in A(S_1 \vee S_2), \xi_i \in \text{Map}_0(S_i, X_i) \right\}$$

$$\text{Mor}((a, S_1, S_2, \xi_1, \xi_2), (b, T_1, T_2, \eta_1, \eta_2))$$

$$= \left\{ (\theta_1, \theta_2) \mid \begin{array}{ccc} A(\theta_1 \vee \theta_2) & \xrightarrow{a} & S_1 \xrightarrow{\xi_1} X_1 \\ \downarrow & \theta_1 \downarrow & \downarrow \eta_1 \\ b & T_1 & \xrightarrow{\eta_1} X_1 \end{array} \right\}$$

この圏体の k -単体の空間は

$$\overbrace{(A \circ \vee) \times \left(\begin{matrix} \text{Mor} \\ \times \\ \text{Mor} \end{matrix} \right) \times \left(\cdots \times \left(\begin{matrix} \text{Mor} \\ \times \\ \text{Mor} \end{matrix} \right) \times \left(\begin{matrix} X_1^P \\ \times \\ X_2^P \end{matrix} \right) \right)}^{k \sqcup}$$

$\text{Ob} \times \text{Ob} \quad \text{Ob} \times \text{Ob} \quad \text{Ob} \times \text{Ob} \quad \text{Ob} \times \text{Ob}$

である. ($\vee: \Gamma \times \Gamma \rightarrow \Gamma$ は wedge 結合をとる functor)

G -functor $\mathbb{F}: \text{simp}(A, X_1 \vee X_2) \rightarrow \text{simp}(A, X_1, X_2)$ を次のように定義する. $\theta \in \text{Mor}((a, S, \xi), (b, T, \eta))$ とする.

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\xi} & X_1 \vee X_2 \\ \downarrow \varphi_i & \searrow \theta & \downarrow \eta \\ & T & \\ \downarrow \psi_i & & \downarrow \eta_i \\ S_i & \xrightarrow{\xi_i} & X_i \\ \downarrow \theta_i & & \downarrow \eta_i \\ T_i & \xrightarrow{\eta_i} & X_i \end{array}$$

$$\xi_i^{-1}(\text{基底}) = \{\text{基底}\}$$

$$\eta_i^{-1}(\text{"}) = \{\text{"}\} \quad (i=1, 2)$$

ここに j_i は標準的な写像とする.

上図の $S_i, \varphi_i, \xi_i, T_i, \psi_i, \eta_i$ が, 上図が可換になるよう同型を除いて唯一存在する. これらを決めるべく上図が可換になるように θ_i が唯一存在する. そこで

$$IF(a, S, \xi) = (A(\varphi_1 \vee \varphi_2)a, S_1, S_2, \xi_1, \xi_2)$$

$$IF(\theta) = (\theta_1, \theta_2)$$

と定義する. これが G -functor となる事は容易に確かめられる.

G -functor $G: \text{Simp}(A, X_1, X_2) \rightarrow \text{Simp}(A, X_1 \vee X_2)$ を $G(a, S_1, S_2, \xi_1, \xi_2) = (a, S_1 \vee S_2, \xi_1 \vee \xi_2)$ で定義する.

$\text{id} \rightarrow GF, \text{id} \rightarrow IFG$ なる自然変換が, 上の φ_i, ψ_i を使って, "冗長な部分をつぶす" 事によってつくれる.

G -functor $H: \text{Simp}(A, X_1, X_2) \rightarrow \text{Simp}(A, X_1) \times \text{Simp}(A, X_2)$ を, $H(a, S_1, S_2, \xi_1, \xi_2) = ((A(\pi_1)a, S_1, \xi_1), (A(\pi_2)a, S_2, \xi_2))$ で定義する. ただし $\pi_i: S_1 \vee S_2 \rightarrow S_i$ は標準的なもの. Γ - G -空間 A の特殊性から, H は, Ob と Mor の空間の上で G -h.e. である.

さらに G -functor $J_i: \text{Simp}(A, X_1 \vee X_2) \rightarrow \text{Simp}(A, X_i)$ を $J_i(a, S, \xi) = (a, S, j_i \circ \xi)$ と定義する. この時, 自然変換 $J_i \rightarrow \text{proj}_i \circ H \circ IF$ が, "冗長な部分をつぶす" 事によってつくれる.

以上のものを幾何学的実現すると, 補題を得る. (終)

[注意] 1) functor A' を Γ (自明な G 作用で \mathcal{W}_G^G の sub-category と思う.) に制限すると, 特殊 Γ - G -空間である. 自然に Γ - G -空間の同値 $A' \rightarrow A$ がある. ([4] Lem. 1.3) A, A' 共に "good" ゆえ, さらに同値 $A' \otimes X \rightarrow A \otimes X$ がある. ([4] Th. 1.5)

2) Identification を調べてみると, $A'(X) \cong A' \otimes X$ である. ([4] Th. 1.5)

[定義] 単体的 G -空間 \mathbb{Z}' を次のように定義する.

$$\mathbb{Z}'_m = X_1 \vee Y^{(0)} \vee Y^{(2)} \vee \dots \vee Y^{(n)} \vee X_2 \quad (\text{Wedge 和})$$

(ただし $Y^{(i)}$ は Y の i コピー)

$$\partial_0: \mathbb{Z}'_m \rightarrow \mathbb{Z}'_{m-1} \iff \partial_0|_{X_1} = \text{id}: X_1 \rightarrow X_1$$

$$\partial_0|_{Y^{(0)}} = f_1: Y^{(0)} \rightarrow X_1$$

$$\partial_0|_{Y^{(2)}} = \text{id}: Y^{(2)} \rightarrow Y^{(1)} \quad \text{などなど},$$

$$S_0: \mathbb{Z}'_m \rightarrow \mathbb{Z}'_{m+1} \iff S_0|_{X_1} = \text{id}: X_1 \rightarrow X_1$$

$$S_0|_{Y^{(0)}} = \text{id}: Y^{(0)} \rightarrow Y^{(2)} \quad \text{などなど}.$$

X_1 を $Y^{(0)}$ でおきかえて, 同様に \mathbb{Z}'' を定義する.

単体的 G -空間の射 $\mathbb{Z}'' \xrightarrow{f} \mathbb{Z}'$ を次のように定義する.

$$f_m: \mathbb{Z}''_m \rightarrow \mathbb{Z}'_m \iff f_m|_{Y^{(0)}} = f_1: Y^{(0)} \rightarrow X_1$$

$$f_m|_{Y^{(i)}} = \text{id}: Y^{(i)} \rightarrow Y^{(i)} \quad (1 \leq i \leq n)$$

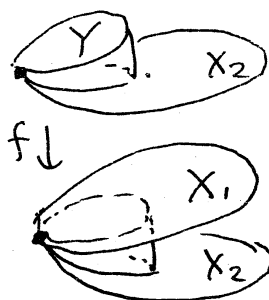
$$f_m|_{X_2} = \text{id}: X_2 \rightarrow X_2$$

補題 ([4] Lem. 1.10)

$$|\Sigma''| = \Sigma_{f_2}$$

$$\begin{array}{ccc} |f| \downarrow & \hookrightarrow & \downarrow f \end{array}$$

$$|\Sigma'| = \Sigma_{(f_1, f_2)}$$



(ただし f は f_1 から導かれる標準的な写像)

(証明) 非退化な単体は, 0 または 1 次元のものだけである事に注意すれば, はりつけ方を見ればわかる. (終)

$A(f)$ なる, 単体的 G -空間の射を考える.

$$A'(Y \vee X_2) \hookrightarrow A'(Y \vee Y \vee X_2) \xrightarrow{\cong} \cdots A'(\Sigma_{f_2})$$

$$\begin{array}{ccc} A'(f_0) \downarrow & A'(f_1) \downarrow & A'(f) \downarrow \end{array}$$

$$A'(X_1 \vee X_2) \hookrightarrow A'(X_1 \vee Y \vee X_2) \xrightarrow{\cong} \cdots A'(\Sigma_{(f_1, f_2)})$$

右端のものは, その実現である.

注意 この 2 つの単体的 G -空間は共に "good" である.

次の命題は, π は G の作用のない場合のものだが, 作用のある場合も全く同様に証明される.

命題 (Segal [2] Prop. 1.6, Puppe [1]) $f: A' \rightarrow A$ を "good" な単体的 G -空間の間の射とすると,

$$\forall \theta \in \text{Mor}_\Delta$$

$$\forall m$$

$$\begin{array}{ccc} A'_m \xrightarrow{A'(\theta)} A'_m & \xrightarrow{\text{G-HC}} & \Delta^m \times A'_m \longrightarrow |A'| \\ f_m \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow |f| \quad \text{G-HC} \\ A_m \xrightarrow{A(\theta)} A_m & & \Delta^m \times A_m \longrightarrow |A| \end{array}$$

この命題を, 上の $A(f)$ に適用する為に, 次を準備する.

補題

$$\begin{array}{ccccc} X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z' \\ \downarrow \textcircled{1} & & \downarrow \textcircled{2} & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z' \\ \downarrow \textcircled{3} & & & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z \end{array}$$

1) 上の①, ② が $G\text{-HC} \Rightarrow$ 外まわり③が $G\text{-HC}$

2) 上の②, ③ が $G\text{-HC} \Rightarrow$ ①が $G\text{-HC}$

$$\begin{array}{ccccc} & & W' & \longrightarrow & Z' \\ & \nearrow \textcircled{E} & \downarrow \textcircled{後} & & \downarrow r \\ X' & \longrightarrow & Y' & & \\ \downarrow \textcircled{前} & & \downarrow & & \\ X & \longrightarrow & Y & & \\ & \searrow \textcircled{F} & & & W \longrightarrow Z \end{array}$$

3) 上図で斜めの写像は全て $G\text{-h.e.}$ ④, ⑤を除いて可換, ④, ⑤は $G\text{-ホモトピー可換}$, さらにその $G\text{-ホモトピー}$ を,

$$H_{\text{上}}: X' \times I \longrightarrow W', \quad H_{\text{下}}: X \times I \longrightarrow W \quad \text{とする,}$$

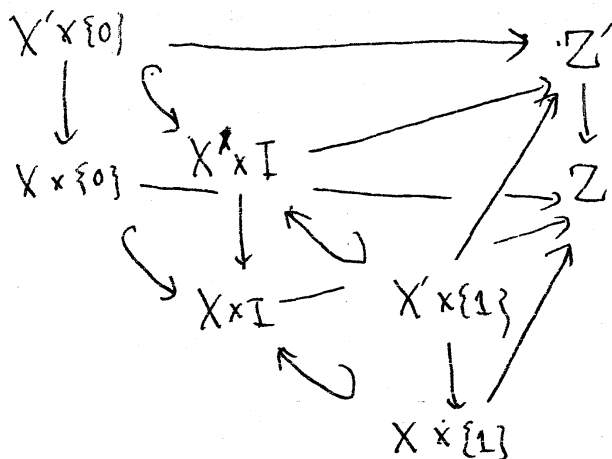
$$\begin{array}{ccc} X' \times I & \xrightarrow{H_{\text{上}}} & W' \\ p \times \text{id} \downarrow & & \downarrow r \\ X \times I & \xrightarrow{H_{\text{下}}} & W \end{array} \quad \text{が可換と仮定する.}$$

以上の仮定のもとで,

$$\textcircled{前} \text{ が } G\text{-HC} \iff \textcircled{後} \text{ が } G\text{-HC}$$

(証明) まず, 右の形の図式のホモトピー論的ファイバー積 $X \overset{f}{\times} Y'$ は q の写像track E_q を f でひきもとした Hurewicz fibering f^*E_q と等しい事に注意すれば, 1), 2) は容易. 3) を示す.

$$\begin{array}{c} Y' \\ \downarrow q \\ X \xrightarrow{f} Y \end{array}$$



左図において

$$\begin{array}{ccc} X' \times \{0\} & \rightarrow & Z' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X \times \{0\} & \rightarrow & Z \end{array}$$

が G-HC と仮定す

ると, 下図におい

て右縦の写像は

G-h.e.

上横の写像は, $(H_F|_{X \times \{0\}})^* Z'$ は $H_F^* Z'$

を G-h.e. によ, て引きもどしたも

のであることから, G-h.e. 下横のは

自明に G-h.e. ゆえに左の縦の写像が G-h.e. すなわち,

$$\begin{array}{ccc} X' \times I & \rightarrow & Z' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X \times I & \rightarrow & Z \end{array} \quad \text{が G-HC. すると 1) によ, て } \begin{array}{ccc} X' \times \{1\} & \rightarrow & Z' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X \times \{1\} & \rightarrow & Z \end{array}$$

が G-HC となる。さて, 3) の図で (後) が G-HC と仮定すると

1) によ, て $\begin{array}{ccc} X' & \rightarrow & W' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \rightarrow & W \end{array}$ と (後) との結合の外まわりが G-HC.

$$\begin{array}{ccc} Y' & \rightarrow & Z' \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \rightarrow & Z \end{array}$$

すると上の事より, (前) と $\begin{array}{ccc} Y' & \rightarrow & Z' \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \rightarrow & Z \end{array}$ を結合した外まわりが,

G-HC. すると 2) によ, て (前) が G-HC. 逆も大体同じで

ある。

(終)

さて, $A(\#)$ が Segal-Puppe の命題の仮定をみたすためには, 下図が G-HC である事がわかればよい。

$$\begin{array}{ccc}
 A'(W) & \xrightleftharpoons{\quad} & A'(Y \vee W) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 A'(X) & \xrightleftharpoons{\quad} & A'(Y \vee X)
 \end{array}$$

(ただし横向矢印は両方共
右向, 又は左向をやる)

さらに次の図式を考える.

$$\begin{array}{ccc}
 A'(W) & \xrightleftharpoons{\quad} & A'(Y \vee W) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 A'(X) & \xrightleftharpoons{\quad} & A'(Y \vee X) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 A'(\text{point}) & \xrightleftharpoons{\quad} & A'(Y)
 \end{array}$$

すると補題の2)によって, 結局, 次の主張が示されればよい事分かる.

主張 $Y \longrightarrow X \in \mathcal{W}_0^G$ の図式とするとき,

$$\begin{array}{ccc}
 1) & A'(X) \longrightarrow A'(Y \vee X) & \text{は } G\text{-HC.} \\
 & \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\
 & A'(\text{point}) \longrightarrow A'(Y)
 \end{array}$$

2) Y が G -連結, 又は Y が自明な G 作用をもつ有限集合で $A(1)$ が群状, とするとき

$$\begin{array}{ccc}
 A'(Y \vee X) & \longrightarrow & A'(X) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 A'(Y) & \longrightarrow & A'(\text{point})
 \end{array} \quad \text{は } G\text{-HC.}$$

(ただし \downarrow の横向の写像は $Y \in X$ に "はりつける" 写像から導かれる写像とする.)

(1) の証明) $A'(\text{point}) \hookrightarrow A'(X)$ は G -NDR. $\therefore A'(X) \xrightarrow[G\text{-h.e.}]{} A'(X)/A'(\text{point}) (= \bar{A}(X))$ と書く.)

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \bar{A}(X) & \longrightarrow & \bar{A}(Y) \times \bar{A}(X) \\
 & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow \\
 A'(X) & \longrightarrow & A'(Y \vee X) & \xrightarrow{\text{point}} & \bar{A}(Y) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \uparrow \\
 A'(\text{point}) & \longrightarrow & A'(Y) & &
 \end{array}$$

上図は可換。斜めの写像はすべて G -h.e. 後の四角は自明に G -HC. \therefore 補題の3)によつて前が G -HC. (終)

定義 $Y \times Y \xrightarrow{m} Y$ を Hopf- G -空間とする。 G -写像 $Y \times X \xrightarrow{\phi} X$ が ホモトピー論的作用

$$\begin{array}{ccccc}
 \iff Y \times Y \times X & \xrightarrow{\text{id} \times \phi} & Y \times X & \xrightarrow{\text{id} \times \phi} & Y \times X \\
 \downarrow m \times \text{id} & & \downarrow \phi & \searrow & \downarrow \phi \\
 Y \times X & \xrightarrow{\phi} & X & & X
 \end{array}$$

が共に G -ホモトピー可換。

補題 $Y \times Y \xrightarrow{m} Y$ を群状 Hopf- G -空間, $Y \times X \xrightarrow{\phi} X$ をホモトピー論的作用とするとき結合

$$Y \times X \xrightarrow{\Delta \times \text{id}} Y \times Y \times X \xrightarrow{\text{id} \times \phi} Y \times X$$

は G -h.e.

証明は容易である。

(主張の2)の証明) 下図において唯一自明でない写像 ϕ は上面が G -ホモトピー可換になる様に定義する。補題の3)によつて、後の四角が G -HC であることを示せばよい。

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & A'(Y) \times A'(X) & \xrightarrow{\phi} & A'(X) \\
 & & \nearrow & \downarrow & & \downarrow \\
 A'(Y \vee X) & \longrightarrow & A'(X) & \xlongequal{\quad} & A'(Y) & \longrightarrow & \text{point} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \nearrow & & \\
 A'(Y) & \xlongequal{\quad} & A'(\text{point}) & & & &
 \end{array}$$

問題になる。という induced Hurewicz fibering は自明なものであり、

$$A'(Y) \times A'(X) \xrightarrow{\Delta \times \text{id}} A'(Y) \times A'(Y) \times A'(X) \xrightarrow{\text{id} \times \phi} A'(Y) \times A'(X)$$

が G -f.e. である事を示せばよい。2) の仮定のもとでは、 $A'(Y)$ は群状であり、 ϕ はホモトピー論的作用だから、上の補題によ、この結合は G -f.e. (終)

以上の事から、下図の2つの四角は G -HC. 従って結合した外回りも G -HC.

$$\begin{array}{ccccc}
 A'(Y) & \longrightarrow & A'(Y \vee X_2) & \longrightarrow & A'(\Sigma_{f_2}) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 A'(X_1) & \longrightarrow & A'(X_1 \vee X_2) & \longrightarrow & A'(\Sigma_{(f_1 f_2)})
 \end{array}$$

よって、 $(A' \otimes X)(1) \xrightarrow[G\text{-f.e.}]{\sim} (A \otimes X)(1)$ だから補題の3) によって命題Iの証明が完了する。 (終)

§3. 命題IIの証明[3]

以下 V は G の有限次元表現空間、 A は "good" な特殊

12 - G -空間とする.

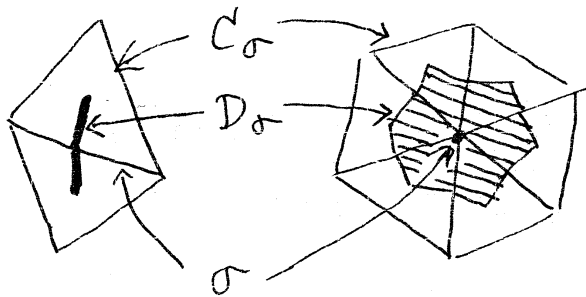
記号 $S: V$ の単位球面

$(K, \Sigma): S$ の十分細かい G -三角形分割 (Σ は K の G 単体 (i.e. 単体の orbit) の集合)

$\sigma \in \Sigma$ に対して, $C_\sigma: \sigma$ の扇星状体

$D_\sigma: K$ の σ における σ の双対部分 G -複体

$b_\sigma: \sigma$ の重心 orbit



$S_\varepsilon \xrightarrow{\pi} S: \text{半径方向への射影} (\varepsilon \text{ 十分小})$

$$\pi^{-1}(\cdot) = (\hat{\cdot})$$

注意 $\hat{C}_\sigma^+ \xrightarrow[G\text{-h.e.}]{} (b_\sigma)_\varepsilon^+, \quad b_\sigma \xrightarrow[G\text{-h.e.}]{} D_\sigma$

$$\begin{array}{ccc} (A \otimes \hat{C}_\sigma^+)(1) & \longrightarrow & \text{Map}_0(D_\sigma^+, (A \otimes \Sigma^V)(1)) \\ \cong \downarrow & & \cong \downarrow \\ (A \otimes (b_\sigma)_\varepsilon^+)(1) & \longrightarrow & \text{Map}_0(b_\sigma^+, (A \otimes \Sigma^V)(1)) \\ \cong \downarrow & & \cong \downarrow \\ \bigvee_{\#(b_\sigma)} (A \otimes \Sigma^V)(1) & \xRightarrow{\quad} & \bigvee_{\#(b_\sigma)} (A \otimes \Sigma^V)(1) \end{array}$$

このとき, 上の可換図式を得る. 上の2つの横方向の写像

は, 命題 II の statement の時と同様に作ったもの. 縦向き
の写像はすべて G -h.e. 従って一番上の横向の写像が G -h.e.

記号 $P \subset \Sigma$ (部分集合) に対して

$$C_P = \bigcup_{\sigma \in P} C_\sigma, \quad D_P = \bigcup_{\sigma \in P} D_\sigma$$

$P, Q \subset \Sigma$ に対して, 次の図式を考える.

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Map}_0(D_{pva}^+, (A \otimes \Sigma^V)(1)) & \longrightarrow & \text{Map}_0(D_p^+, (A \otimes \Sigma^V)(1)) & & \\
 \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \\
 \text{Map}_0(D_a^+, (A \otimes \Sigma^V)(1)) & \longrightarrow & \text{Map}_0(D_{pna}^+, (A \otimes \Sigma^V)(1)) & & \\
 \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \\
 (A \otimes \hat{C}_{pva}^+)(1) & \longrightarrow & (A \otimes \hat{C}_p^+)(1) & & \\
 \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \\
 (A \otimes \hat{C}_a^+)(1) & \longrightarrow & (A \otimes \hat{C}_{pna}^+)(1) & &
 \end{array}$$

左上以外の斜めの写像が G -h.e. である事を仮定して, 左
上の斜めの写像が G -h.e. である事が示されれば, $\#(P)$ に関
する帰納法で, 命題 II の証明は終る. 上の事を示す為には,
前後の四角が G -HC である事を示せばよい. 後は自明にそう.
前のは命題 I から G -HC である事が分る. (終)

§4. 定理の証明 [3]

命題 I の系 A を "good" な特殊 Γ - G -空間で $A(\text{point}) = \text{point}$,
 $Y \subset X$ は G -NDR とする. このとき, Y が G -連結, 又は,

Y が自明な G -作用をもつ有限集合で $A(\underline{1})$ が群状, とすると,
右図は G -HC.

$$\begin{array}{ccc} (A \otimes Y)(\underline{1}) & \longrightarrow & (A \otimes X)(\underline{1}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{point} & \longrightarrow & (A \otimes (X/Y))(\underline{1}) \end{array}$$

証明は容易. これを用いて, まず $A(\underline{1})$ が群状のとき,
 $A(\underline{1}) \xrightarrow[\text{G-f.e.}]{\sim} \Omega^W(A \otimes \Sigma^W)(\underline{1})$ を示す.

記号 B_r : W の原点中心半径 r の閉球体. ∂B_r : その境界.
次の可換図式が存在する.

$$\begin{array}{ccc} \text{Map}_0(B_1/\partial B_1, (A \otimes \Sigma^W)(\underline{1})) & \longrightarrow & \text{Map}_0(B_1^+, (A \otimes \Sigma^W)(\underline{1})) \\ \swarrow & \downarrow & \searrow \\ \text{point} & & \text{Map}_0(\partial B_1^+, (A \otimes \Sigma^W)(\underline{1})) \\ \swarrow & & \searrow \\ (A \otimes \left(\frac{\partial B_2 \cup 0}{\partial B_2} \right))(\underline{1}) & \longrightarrow & (A \otimes \left(\frac{B_2}{\partial B_2} \right))(\underline{1}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{point} & \longrightarrow & (A \otimes \left(\frac{B_2}{\partial B_2 \cup 0} \right))(\underline{1}) \end{array}$$

斜めの写像は命題 II の state ment のときと同様にしてつく
ったもの. 前後の四角は G -HC. 右上の斜めの写像は自明に
 G -f.e. 右下の斜め向き の写像は, 命題 II によって G -f.e.
 \therefore 左上の斜め向き の写像が G -f.e. すなわち

$$A(\underline{1}) = (A \otimes \Sigma^0)(\underline{1}) \xrightarrow[\text{G-f.e.}]{\sim} \Omega^W(A \otimes \Sigma^W)(\underline{1})$$

次に, Γ - G -空間 A のかわりに, $A \otimes \Sigma^V$ を使うと, $V^G \neq \{0\}$ なら $(A \otimes \Sigma^V)(1)$ は群状 かつ, 同様の議論で,

$$(A \otimes \Sigma^V)(1) \xrightarrow[G\text{-h.e.}]{} \Omega^W((A \otimes \Sigma^V) \otimes \Sigma^W)(1)$$

ここで, $((A \otimes \Sigma^V) \otimes \Sigma^W)(1) \cong (A \otimes \Sigma^{V \oplus W})(1)$ である. これで定理の 1), 2) の証明が終った. 次に 3) を示す.

まず, $V^G \neq \{0\}$ のとき

$$\begin{array}{ccc} & A(1)_\infty & \\ \omega_1 \swarrow & \cap & \searrow \omega_V \\ \Omega^1(A \otimes \Sigma^1)(1) & \xrightarrow[G\text{-h.e.}]{} & \Omega^V(A \otimes \Sigma^V)(1) \end{array}$$

であるから, ω_1 についてのみ示せばよい. これは, $\forall H < G$, $(A(1)_\infty)^H = (A^H)(1)_\infty$, $(\Omega^1(A \otimes \Sigma^1)(1))^H = \Omega^1(A^H \otimes \Sigma^1)(1)$ かつ, G -作用のない場合 ([2] §.4) に帰着される. (ここは A^H は H -不動点をとった非同変 Γ -空間.) (終)

References

- [1] V. Puppe : A Remark on "homotopy fibrations", Manuscripta. Math. (1974)
- [2] G. Segal : Categories and cohomology theories, Topology, Vol. 13 (1974)
- [3] G. Segal : Some results in equivariant homo-

topy theory, preprint.

[4] R. Woolfson: Hyper- Γ -spaces and hyperspectra,
Quart. J. Math. 30 (1979)

[5] S. Waner: Equivariant classifying spaces and
fibrations, Chicago, Thesis. (1978)